

О. А. Базаркина, Н. Г. Тактаров

ВРАЩАТЕЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПОРИСТОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С НЕПРОНИЦАЕНЫМ ЯДРОМ В ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Аннотация.

Актуальность и цели. Исследование течений вязкой жидкости, контактирующей с погруженными в нее колеблющимися пористыми телами различной конфигурации, представляет большой интерес для гидродинамики в связи с большой теоретической значимостью и различными практическими приложениями. Целью настоящей работы является определение полей скоростей фильтрации и скоростей свободной жидкости в областях внутри и вне пористой сферической оболочки с непроницаемым сферическим ядром, совершающей вращательно-колебательное движение.

Материалы и методы. Для решения задачи о течении вязкой жидкости, вызванном вращательно-колебательным движением погруженной в нее пористой сферической оболочки с непроницаемым сферическим ядром, используются методы математической физики, векторного анализа, методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Для описания течений вязкой жидкости в пористой среде используется нестационарное уравнение Бринкмана. Движение жидкости вне пористой среды описывается уравнением Навье – Стокса.

Результаты. Получены аналитические решения нестационарного уравнения Бринкмана и уравнения Навье – Стокса для пористой среды и свободной жидкости вне пористой среды соответственно. Определены поля скорости фильтрации и скорости свободной жидкости внутри и вне пористой среды.

Выводы. Показано, что поля скоростей жидкости для случаев пористой сферической оболочки с непроницаемым ядром и пористой сферы без ядра существенно различаются. Показано также, что в частных случаях из полученного в настоящей работе решения следуют известные ранее результаты о течениях в вязкой жидкости, вызванных вращательно-колебательным движением погруженного в нее пористого шара.

Ключевые слова: вязкая жидкость, пористая сферическая оболочка, непроницаемое твердое ядро, вращательно-колебательное движение, уравнение Бринкмана, уравнение Навье – Стокса.

О. А. Bazarkina, N. G. Taktarov

ROTARY VIBRATIONS OF A POROUS SPHERICAL SHELL WITH AN IMPERMEABLE CORE IN A VISCOUS LIQUID

Abstract.

Background. The investigation of the viscous liquid flows in contact with the oscillating submerged porous bodies of various configurations is of a considerable in-

terest for hydrodynamics in the connection with a great theoretical importance and various practical applications. The aim of the present paper is to determine the fields of filtration velocities and free liquid velocities respectively inside and outside the porous spherical shell with the impermeable spherical core which performs rotational-oscillatory motion in a viscous liquid.

Materials and methods. To solve the problem of the viscous liquid flow induced by rotational-oscillatory motion of the submerged porous spherical shell with the impermeable spherical core we used methods of mathematical physics, vector analysis and ordinary differential equations solving. To describe the viscous liquid flows in the porous medium the nonstationary Brinkman equation is used. The motion of the viscous liquid outside the porous medium with the Navier-Stokes equation is described.

Results. Exact analytical solutions for the nonstationary Brinkman equation in the region inside the porous medium and for the Navier-Stokes equation outside the porous medium respectively are obtained. The fields of the filtration velocity and the free liquid velocity inside and outside the porous medium respectively are determined.

Conclusions. It is shown that the liquid velocity fields in the cases of the spherical porous shell with an impermeable core and a porous sphere without the core differs considerable. It is shown also that the results obtained earlier for particular case of the viscous fluid flows induced by a rotational-oscillatory motion of a submerged porous sphere can be obtained from the solution presented in this paper.

Keywords: viscous liquid, porous spherical shell, impermeable solid core, rotational-oscillatory motion, Brinkman equation, Navier-Stokes equation.

Введение

Исследование течений вязкой жидкости, контактирующей с колеблющимися погруженными в нее пористыми телами различной конфигурации, представляет большой интерес для гидродинамики в связи с большой теоретической значимостью и различными практическими приложениями.

Течения, возникающие в вязкой жидкости при колебаниях погруженных в нее пористых тел, обладают специфическими особенностями, отличающими их от течений, возникающих при колебаниях сплошных твердых тел в жидкости. Как известно, течение вязкой жидкости внутри и вне пористых тел определяется уравнениями гидродинамики и граничными условиями на поверхностях раздела сред. Классическое граничное условие к уравнениям движения жидкости, контактирующей с твердой поверхностью, состоит в равенстве скоростей жидкости и твердой поверхности (условие прилипания). Граничные условия на поверхностях контакта пористых тел с вязкой жидкостью существенно отличаются от таковых для случая контакта жидкости с твердой непроницаемой поверхностью. В связи с этим решение задач с движущимися в вязкой жидкости пористыми телами и совершающими колебательные движения в нестационарных условиях является существенным расширением классических решений задач о движении сплошных твердых тел в вязкой жидкости.

В работе [1] изложены общие принципы изучения течений вязкой жидкости, характеризуемых малыми числами Рейнольдса, а также приведены многочисленные примеры решения прикладных задач. Уравнения движения жидкостей через пористые среды приведены, например, в работах [2, 3].

В работах [4, 5] решены задачи о течении вязкой жидкости, вызванном движением погруженных сплошных твердых тел. В частности, в [4] рассмот-

рены течения вязкой жидкости, вызванные движением бесконечной плоской поверхности, контактирующей с жидкостью и совершающей колебания в своей плоскости. В работе [4] решены также задачи о течениях вязкой жидкости, вызванных вращательным и поступательным колебаниями сплошного твердого шара, погруженного в жидкость.

Уравнения движения жидкости в пористой среде приведены в работах [6–10]. Граничные условия на поверхности раздела пористой среды и свободной жидкости приведены в работах [7, 11, 12].

В статье [13] решена задача о течении вязкой жидкости через пористый шар, находящийся в другой пористой среде, с использованием модели фильтрации Бринкмана. В статьях [14, 15] с использованием модели фильтрации Дарси рассмотрены задачи об обтекании пористой сферической оболочки, ограниченной двумя концентрическими сферическими поверхностями.

Задачи об обтекании непроницаемых сферы и цилиндра, находящихся в пористой среде, с использованием модели Бринкмана решены в [16]. В этой работе обращено внимание на то, что в модели фильтрации Бринкмана в качестве граничного условия на поверхности контакта пористой среды и непроницаемого твердого тела в общем случае вместо условия прилипания жидкости надо брать условие ее проскальзывания, аналогичное приведенному, например, в [13]. В работе [17] с использованием нестационарного уравнения Бринкмана определено движение вязкой жидкости, вызванное вращательно-колебательным движением погруженного в нее пористого шара. В статье [18] определены течения вязкой жидкости, вызванные поступательно-колебательным движением погруженного в нее пористого шара.

Целью настоящей работы является определение полей скоростей фильтрации и скоростей свободной жидкости в областях соответственно внутри и вне пористой оболочки, совершающей вращательно-колебательное движение.

1. Постановка задачи

Рассматриваются течения вязкой жидкости, вызванные вращательно-колебательным движением погруженной в нее пористой сферической оболочки и концентрического твердого сферического непроницаемого ядра, жестко связанного с оболочкой. Радиус сферического ядра и внешний радиус пористой сферической оболочки равны соответственно a и b ($a < b$). Далее предполагается, что пористая среда является однородной, изотропной, недеформируемой. Предполагается также, что пористая среда имеет высокий коэффициент проницаемости K и достаточно большую пористость Γ . Такими свойствами могут обладать, например, волокнистые, а также сильно вспененные материалы, у которых величина K достигает значений 10^{-4} см². В данных условиях в пористой матрице могут возникать колебательные движения жидкости со скоростью, заметно отличающейся от скорости матрицы.

Угловую скорость вращения твердого ядра и пористой оболочки вокруг фиксированной оси, проходящей через точку O (O – общий центр твердого ядра и пористой оболочки), запишем как функцию от времени t^* в виде $\Omega^* = \Omega_0 \exp(-i\omega t^*)$, где Ω_0 – постоянный вещественный вектор, ω – частота колебаний. Известно, что для вращающегося твердого тела скорость любой его точки с радиусом-вектором $\mathbf{r}^*$ имеет вид: $\mathbf{v}^* = \Omega^* \times \mathbf{r}^*$, где « $\times$ » означает векторное произведение. Знаком « $*$ » здесь и далее обозначены размерные пе-

ременные (но не размерные параметры), чтобы отличать их от безразмерных, обозначаемых теми же символами.

В окончательных результатах всех вычислений подразумеваются действительные части от соответствующих комплексных выражений.

Для изучения течений вязкой жидкости внутри и вне пористой оболочки с непроницаемым ядром, совершающей вращательно-колебательные движения, используется неподвижная декартова система координат $Ox^*y^*z^*$. Начало координат O совпадает с общим центром пористого сферического слоя и твердого ядра. Ось Oz^* этой системы координат направлена вдоль единичного вектора $\mathbf{e}$, где $\mathbf{e} = \boldsymbol{\Omega}_0 / \Omega_0$. На рис. 1 представлена схема задачи.

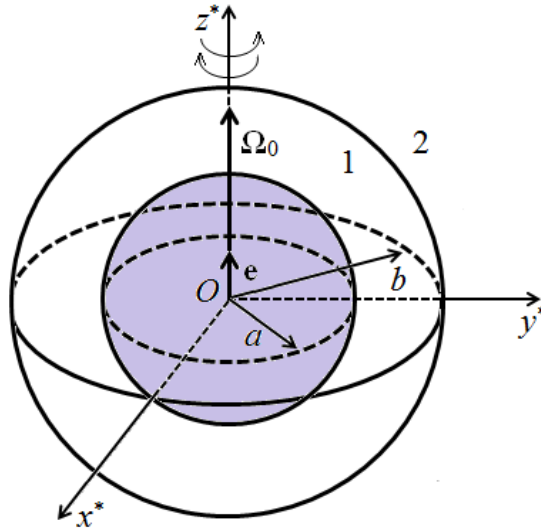


Рис. 1. Схема задачи

Система уравнений нестационарного движения вязкой жидкости в пористой среде (модель Бринкмана) имеет вид [6–10]:

$$\frac{\rho}{\Gamma} \frac{\partial \mathbf{u}_1^*}{\partial t^*} = -\text{grad}^* p_1^* + \eta' \nabla^{*2} \mathbf{u}_1^* - \frac{\eta}{K} (\mathbf{u}_1^* - \mathbf{u}^*), \quad \text{div}^* \mathbf{u}_1^* = 0, \quad (1)$$

здесь Γ – пористость ($\Gamma = \text{const}$); $\mathbf{u}_1^*$ – скорость фильтрации; p_1^* – среднее по объему пор давление; ρ – плотность жидкости; η' – величина с размерностью вязкости; η – вязкость свободной (вне пористой среды) жидкости; $\mathbf{u}^* = \Gamma \mathbf{v}^*$, ∇^* – набла оператор. Здесь и далее величины, относящиеся к пористой среде и свободной жидкости, обозначаются индексами 1 и 2 соответственно.

Уравнения движения свободной жидкости (вне пористой среды) в приближении Стокса имеют вид [4]:

$$\frac{\partial \mathbf{u}_2^*}{\partial t^*} = -\frac{1}{\rho} \text{grad}^* p_2^* + \eta \nabla^{*2} \mathbf{u}_2^*, \quad \text{div}^* \mathbf{u}_2^* = 0, \quad (2)$$

где $\mathbf{u}_2^*$ – скорость свободной жидкости.

Для решения задачи введем сферическую систему координат r^* , θ , φ с ортонормированным базисом $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$, $\mathbf{e}_\varphi$, полярная ось которой совмещена с осью Oz^* . Полярный угол θ отсчитывается от положительной полуоси Oz^* .

Частицы жидкости внутри и вне пористой среды движутся по окружностям с центрами на оси вращения. Вследствие осевой симметрии относительно оси вращения градиент давления в касательном к этим окружностям направлении будет равен нулю. Поэтому из уравнений движения (1) и (2) давление выпадает. Кроме того, $u_{j\varphi}^* \neq 0$, $u_{jr}^* = 0$, $u_{j\theta}^* = 0$ ($j = 1, 2$). От азимутального угла φ все величины не зависят вследствие осевой симметрии.

Уравнения (1), (2) в сферической системе координат примут вид:

$$\frac{\rho}{\Gamma} \frac{\partial u_{1\varphi}^*}{\partial t^*} = \eta' \left(\Delta^* u_{1\varphi}^* - \frac{u_{1\varphi}^*}{r^{*2} \sin^2 \theta} \right) - \frac{\eta}{K} (u_{1\varphi}^* - u_\varphi^*), \quad (3)$$

$$\rho \frac{\partial u_{2\varphi}^*}{\partial t^*} = \eta \left(\Delta^* u_{2\varphi}^* - \frac{u_{2\varphi}^*}{r^{*2} \sin^2 \theta} \right),$$

здесь $u_\varphi^* = \Gamma v_\varphi^*$, $v_\varphi^* = \Omega_0 \exp(-i\omega t^*) r^* \sin \theta$,

$$\nabla^{*2} = \frac{1}{r^{*2}} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^{*2} \frac{\partial}{\partial r^*} \right) + \frac{1}{r^{*2} \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right).$$

Граничные условия к уравнениям (3) имеют вид [1, 7, 11, 12, 16]:

– на поверхности непроницаемого ядра, при $r^* = a$:

$$u_{1\varphi}^* - \Gamma v_\varphi^* = B \left[\frac{\partial(u_{1\varphi}^* - \Gamma v_\varphi^*)}{\partial r^*} - \frac{u_{1\varphi}^* - \Gamma v_\varphi^*}{a} \right]; \quad (4)$$

– на внешней поверхности пористой среды при $r^* = b$:

$$\Lambda \left[\eta' \left(\frac{\partial(u_{1\varphi}^* - \Gamma v_\varphi^*)}{\partial r^*} - \frac{u_{1\varphi}^* - \Gamma v_\varphi^*}{b} \right) - \eta \left(\frac{\partial(u_{2\varphi}^* - v_\varphi^*)}{\partial r^*} - \frac{u_{2\varphi}^* - v_\varphi^*}{b} \right) \right] = \eta (u_{1\varphi}^* - \Gamma v_\varphi^*),$$

$$u_{1\varphi}^* - \Gamma v_\varphi^* = u_{2\varphi}^* - v_\varphi^*.$$

Здесь B и Λ – параметры с размерностью длины. Параметр B называется коэффициентом трения скольжения [1]. Параметр Λ определяется равенством $\Lambda = \sqrt{K} / \tau$, где τ – безразмерный параметр [12]. При $\Lambda \rightarrow 0$ получаем условие отсутствия проскальзывания жидкости на поверхности пористой матрицы: $u_{1\varphi}^* - \Gamma v_\varphi^* = 0$; при $\Lambda \rightarrow \infty$ – условие непрерывности касательных напряжений.

К граничным условиям (4) следует добавить также условие конечности решений всюду в областях их определения, в том числе при $r^* \rightarrow 0$ и $r^* \rightarrow \infty$.

Следовательно, задача о течениях вязкой жидкости, вызванных колебанием пористой сферической оболочки с твердым ядром, является краевой задачей, состоящей из уравнений (3) и граничных условий (4).

2. Решение задачи

Введем безразмерные переменные, принимая за единицу длины b , за единицу времени $1/\omega$, за единицу скорости $v_0 = \Omega_0 b$: $\mathbf{r} = \mathbf{r}^* / b$, $t = \omega t^*$, $\mathbf{u}_{1\varphi} = \mathbf{u}_{1\varphi}^* / v_0$, $\mathbf{u}_{2\varphi} = \mathbf{u}_{2\varphi}^* / v_0$, $\mathbf{u} = \mathbf{u}^* / v_0 = \Gamma(\mathbf{e} \times \mathbf{r}) \exp(-it)$.

Уравнения движения жидкости (3) в безразмерном виде примут вид

$$\frac{\omega b^2}{\Gamma v} \frac{\partial u_{1\varphi}}{\partial t} = \frac{1}{\gamma^2} \left[\Delta u_{1\varphi} - \frac{u_{1\varphi}}{r^2 \sin^2 \theta} \right] - \frac{b^2}{K} (u_{1\varphi} - \Gamma r \sin \theta e^{-it}), \quad (5)$$

$$\frac{\omega b^2}{v} \frac{\partial u_{2\varphi}}{\partial t} = \Delta u_{2\varphi} - \frac{u_{2\varphi}}{r^2 \sin^2 \theta}.$$

Безразмерные граничные условия:

– при $r = \alpha$:

$$u_{1\varphi} - \Gamma \alpha \sin \theta e^{-it} = \beta \left(\frac{\partial u_{1\varphi}}{\partial r} - \frac{u_{1\varphi}}{\alpha} \right); \quad (6)$$

– при $r = 1$:

$$\lambda \left[\frac{1}{\gamma^2} \left(\frac{\partial u_{1\varphi}}{\partial r} - u_{1\varphi} \right) - \left(\frac{\partial u_{2\varphi}}{\partial r} - u_{2\varphi} \right) \right] = u_{1\varphi} - \Gamma \sin \theta e^{-it},$$

$$u_{1\varphi} - \Gamma v_\varphi = u_{2\varphi} - v_\varphi;$$

– при $r \rightarrow \infty$:

$$u_{2\varphi} = 0.$$

Здесь $\alpha = \frac{a}{b}$ ($\alpha < 1$), $\lambda = \frac{\Lambda}{b}$, $\beta = \frac{B}{b}$, $\gamma^2 = \frac{\eta}{\eta'}$, $v = \frac{\eta}{\rho}$, $v_\varphi = e^{-it} \sin \theta$.

Скорости $u_{1\varphi}$ и $u_{2\varphi}$ будем искать в виде

$$u_{1\varphi} = e^{-it} F_1(r) \sin \theta, \quad u_{2\varphi} = e^{-it} F_2(r) \sin \theta.$$

Подставляя в уравнения (5) выражения для $u_{1\varphi}$ и $u_{2\varphi}$, получим дифференциальные уравнения для определения функций $F_1(r)$ и $F_2(r)$.

Граничные условия к этим дифференциальным уравнениям имеют вид:

– при $r = \alpha$:

$$F_1(r) - \Gamma \alpha = \beta \left[F_1'(r) - \frac{F_1(r)}{\alpha} \right]; \quad (7)$$

– при $r = 1$:

$$\lambda \left[\frac{1}{\gamma^2} (F_1'(r) - F_1(r)) - (F_2'(r) - F_2(r)) \right] = F_2(r) - \Gamma,$$

$$F_1(r) - \Gamma = F_2(r) - 1.$$

Сюда добавляется также условие конечности решений в областях их определения.

Уравнение для $F_1(r)$ имеет вид

$$r^2 F_1''(r) + 2r F_1'(r) + (m_1^2 r^2 - 2) F_1(r) + 2\gamma^2 \left(\frac{b}{\delta_1} \right)^2 r^3 = 0, \quad (8)$$

здесь

$$m_1^2 = \frac{2}{\Gamma} \gamma^2 \left[i \left(\frac{b}{\delta_2} \right)^2 - \left(\frac{b}{\delta_1} \right)^2 \right], \quad \delta_1 = \sqrt{\frac{2K}{\Gamma}}, \quad \delta_2 = \sqrt{\frac{2v}{\omega}},$$

$$m_1 = \frac{\gamma b}{\sqrt{\Gamma}} \left(\frac{1}{\delta} + \frac{i\delta}{\delta_2^2} \right), \quad \frac{1}{\delta^2} = -\frac{1}{\delta_1^2} + \sqrt{\frac{1}{\delta_1^4} + \frac{1}{\delta_2^4}}.$$

Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения (8) имеет вид

$$F_1(r) = A_1 j_1(m_1 r) + B_1 y_1(m_1 r) + \frac{2\gamma^2}{m_1^3} \left(\frac{b}{\delta_1} \right)^2 \left\{ (m_1^2 r^2 - 3) \times \right. \\ \left. \times [j_1(m_1 r) \cos m_1 r + y_1(m_1 r) \sin m_1 r] - 3m_1 r [j_1(m_1 r) \sin m_1 r - y_1(m_1 r) \cos m_1 r] \right\}, \quad (9)$$

здесь j_1 – сферическая функция Бесселя первого рода; y_1 – сферическая функция Бесселя второго рода; A_1, B_1 – неопределенные коэффициенты.

Согласно [19] функции $j_1(x)$ и $y_1(x)$ могут быть записаны в виде

$$j_1(x) = \frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x}, \quad y_1(x) = -\frac{\cos x}{x^2} - \frac{\sin x}{x}. \quad (10)$$

С учетом равенств (10) общее решение (9) примет вид

$$F_1(r) = \frac{A_1}{m_1^2 r^2} (\sin m_1 r - m_1 r \cos m_1 r) - \frac{B_1}{m_1^2 r^2} (\cos m_1 r + m_1 r \sin m_1 r) - Cr, \quad (11)$$

где

$$C = \frac{2\gamma^2}{m_1^2} \left(\frac{b}{\delta_1} \right)^2.$$

Уравнение для $F_2(r)$ имеет вид

$$r^2 F_2''(r) + 2r F_2'(r) + (m_2^2 r^2 - 2) F_2(r) = 0, \quad (12)$$

где $m_2^2 = 2i\left(\frac{b}{\delta_2}\right)^2$, $m_2 = \frac{b}{\delta_2}(1+i)$.

Общее решение линейного однородного дифференциального уравнения (12):

$$F_2(r) = A_2 j_1(m_2 r) + B_2 y_1(m_2 r),$$

здесь A_2, B_2 – неопределенные коэффициенты.

Учитывая условие на бесконечности ($r \rightarrow \infty$), находим: $B_2 = iA_2$.

С учетом (10) и равенства $B_2 = iA_2$ общее решение уравнения (12) примет вид

$$F_2(r) = -\frac{A_2}{m_2^2 r^2} (i + m_2 r) \exp(im_2 r). \quad (13)$$

Подставляя выражения (11) и (13) в граничные условия (7), получим систему трех алгебраических уравнений для определения коэффициентов A_1, B_1, A_2 , решая которую, находим:

$$A_1 = \frac{m_1^2 D_2 (D_7 - D_8 D_9)}{D_1 [(i + m_2) D_{10} - D_8 D_{11}]} + \frac{\alpha^4 m_1^2 (C + \Gamma)}{D_1}, \quad B_1 = \frac{m_1^2 (D_7 - D_8 D_9)}{(i + m_2) D_{10} - D_8 D_{11}}, \quad (14)$$

$$A_2 = \frac{m_2^2 D_9}{(i + m_2) \exp(im_2) D_1} - \frac{m_2^2 D_{11} (D_7 - D_8 D_9)}{(i + m_2) \exp(im_2) D_1 [(i + m_2) D_{10} - D_8 D_{11}]},$$

$$D_1 = (\alpha + 3\beta)(\sin m_1 \alpha - m_1 \alpha \cos m_1 \alpha) - \alpha^2 \beta m_1^2 \sin m_1 \alpha,$$

$$D_2 = (\alpha + 3\beta)(\cos m_1 \alpha + m_1 \alpha \sin m_1 \alpha) - \alpha^2 \beta m_1^2 \cos m_1 \alpha,$$

$$D_3 = \sin m_1 - m_1 \cos m_1, \quad D_4 = \cos m_1 + m_1 \sin m_1,$$

$$D_5 = (3\lambda + \gamma^2) D_3 - \lambda m_1^2 \sin m_1, \quad D_6 = (3\lambda + \gamma^2) D_4 - \lambda m_1^2 \cos m_1.$$

$$D_7 = (C + \Gamma)(i + m_2)(\gamma^2 D_1 - \alpha^4 D_5), \quad D_8 = \lambda \gamma^2 (3i + 3m_2 - im_2^2),$$

$$D_9 = (C + \Gamma)(D_1 - \alpha^4 D_3) - D_1, \quad D_{10} = D_2 D_5 - D_1 D_6, \quad D_{11} = D_2 D_3 - D_1 D_4.$$

3. Анализ решения

В частном случае при отсутствии твердого ядра ($\alpha = 0$) получается решение задачи о течении вязкой жидкости, вызванном вращательно-колебательным движением пористого шара, приведенное в работе [17], в которой ошибочные граничные условия следует заменить граничными условиями (4) настоящей работы.

При переходе в выражениях (11), (13) к пределу $\omega \rightarrow 0$ ($b/\delta_2 \rightarrow 0$) получаем поля скоростей жидкости внутри и вне пористого сферического слоя с непроницаемым твердым ядром при его равномерном вращении вокруг оси Oz :

$$u_{1\varphi} = \frac{\sin \theta}{r^2} \left[A'_1 (\sin m_1 r - m_1 r \cos m_1 r) - B'_1 (\cos m_1 r + m_1 r \sin m_1 r) - Cr \right], \quad (15)$$

$$u_{2\phi} = -\frac{\sin \theta}{r^2} A'_2,$$

где

$$A'_1 = \frac{D_2[(C + \Gamma)(\gamma^2 D_1 - \alpha^4 D_5) - 3\lambda \gamma^2 D_9]}{D_1[D_{10} - 3\lambda \gamma^2 D_{11}]} + \frac{\alpha^4 (C + \Gamma)}{D_1},$$

$$B'_1 = \frac{(C + \Gamma)(\gamma^2 D_1 - \alpha^4 D_5) - 3\lambda \gamma^2 D_9}{D_{10} - 3\lambda \gamma^2 D_{11}},$$

$$A'_2 = \frac{D_9}{D_1} - \frac{D_{11}[(C + \Gamma)(\gamma^2 D_1 - \alpha^4 D_5) - 3\lambda \gamma^2 D_9]}{D_1[D_{10} - 3\lambda \gamma^2 D_{11}]}, \quad m_1^2 = -\frac{2}{\Gamma} \gamma^2 \left(\frac{b}{\delta_1} \right)^2.$$

Результаты анализа математической модели течений в вязкой жидкости, вызванных вращательно-колебательным движением сферической пористой оболочки с непроницаемым твердым ядром, представлены на рис. 2–5.

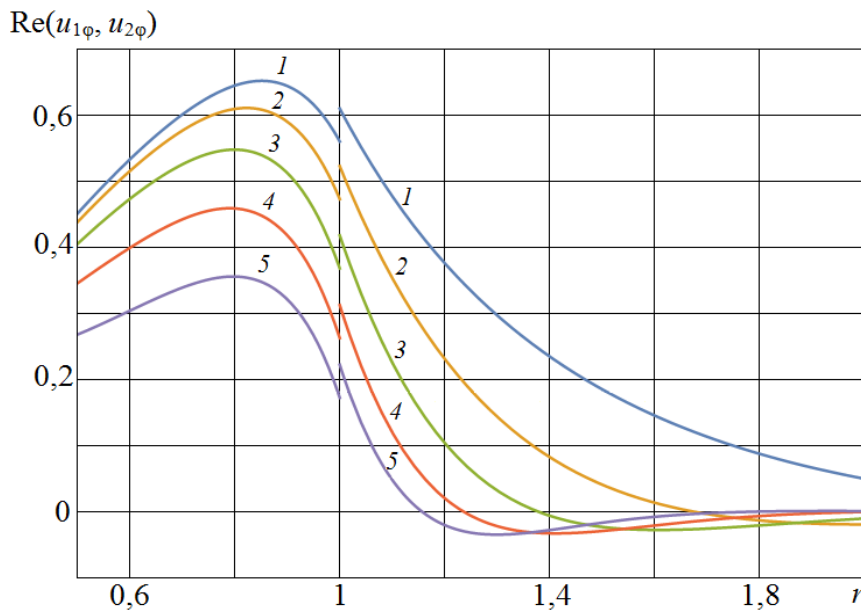


Рис. 2. Зависимость $\text{Re}(u_{1\varphi}, u_{2\phi})$ от r : $t = 0$; $\alpha = 0,5$; $\beta = 1$; $\lambda \rightarrow \infty$; $\theta = \pi/2$; $\Gamma = 0,95$; $b/\delta_1 = 5$; $b/\delta_2 = 1$; 2; 3; 4; 5 (кривые 1–5)

На этих рисунках показаны поля скоростей фильтрации и свободной жидкости в областях 1 и 2 в момент времени $t = 0$ (в связи с нестационарностью движения поля скоростей изменяются со временем). На всех графиках приведены зависимости действительной части $\text{Re}(u_{1\varphi}, u_{2\phi})$ от r , т.е. $\text{Re } u_{1\varphi}(r)$ ($\alpha \leq r \leq 1$) и $\text{Re } u_{2\phi}(r)$ ($1 \leq r \leq \infty$).

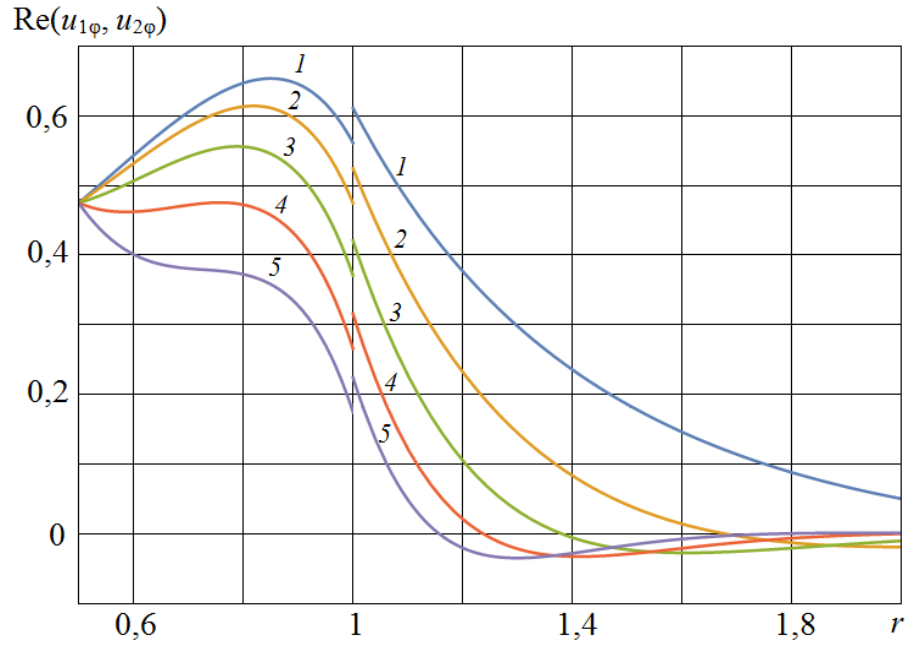


Рис. 3. Зависимость $\text{Re}(u_{1\varphi}, u_{2\varphi})$ от r : $t = 0$; $\alpha = 0,5$; $\beta = 0$; $\lambda \rightarrow \infty$; $\theta = \pi/2$; $\Gamma = 0,95$; $b/\delta_1 = 5$; $b/\delta_2 = 1; 2; 3; 4; 5$ (кривые 1–5)

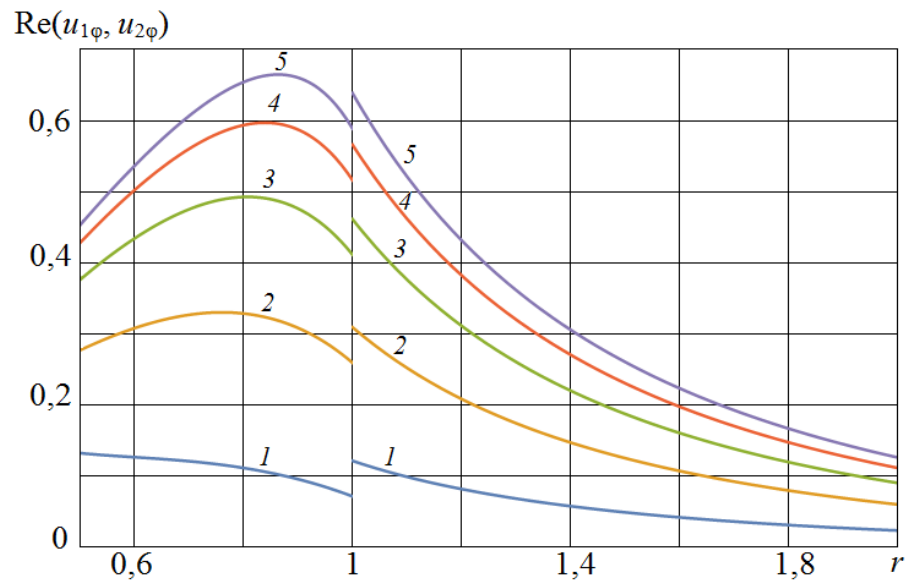


Рис. 4. Зависимость $\text{Re}(u_{1\varphi}, u_{2\varphi})$ от r : $t = 0$; $\alpha = 0,5$; $\beta = 1$; $\lambda \rightarrow \infty$; $\theta = \pi/2$; $\Gamma = 0,95$; $b/\delta_2 = 0,5$; $b/\delta_1 = 1; 2; 3; 4; 5$ (кривые 1–5)

Неравенствами $\alpha \leq r \leq 1$ и $1 \leq r \leq \infty$ задаются области внутри и вне пористой среды соответственно. Разрывы графиков на границе пористой среды и свободной жидкости объясняются тем, что скорость фильтрации не является скоростью частиц жидкости. По определению скорость фильтрации $\mathbf{u}_1^* = \Gamma \mathbf{v}_1^*$ равна произведению пористости Γ на среднюю скорость жидкости

в порах v_1^* . Из третьего граничного условия (6) при $r = 1$ видно, что при $\Gamma \rightarrow 1$ разрывы в графиках исчезают.

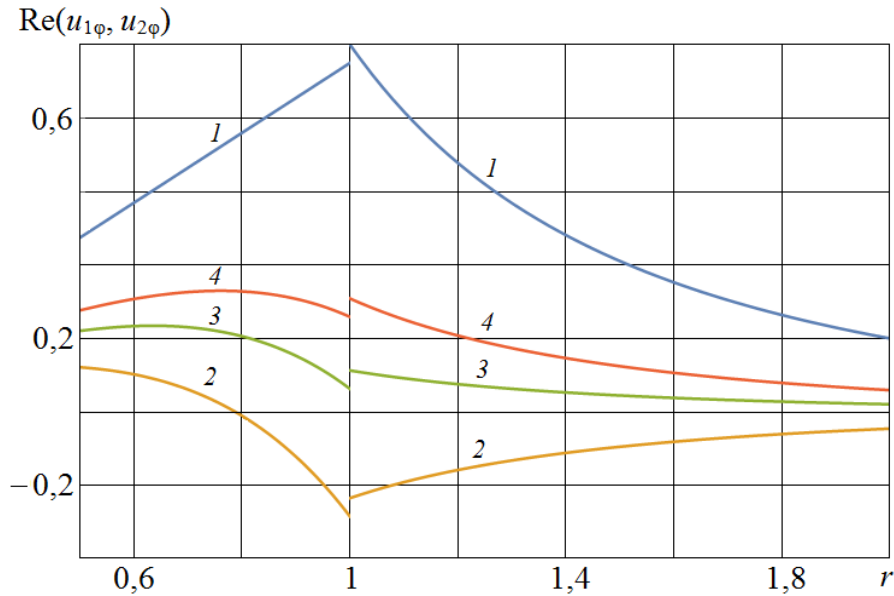


Рис. 5. Зависимость $\text{Re}(u_{1\varphi}, u_{2\varphi})$ от r : $t = 0$; $\alpha = 0,5$; $\beta = 1$; $\theta = \pi/2$; $\Gamma = 0,95$; $b/\delta_1 = 2$; $b/\delta_2 = 0,5$; $\lambda = 0; 0,5; 1; \infty$ (кривые 1–4)

На рис. 2 приведены графики зависимостей $\text{Re } u_{1\varphi}(r)$ и $\text{Re } u_{2\varphi}(r)$ для случая, когда величина $b/\delta_1 = 5$ зафиксирована, а b/δ_2 принимает значения 1, 2, 3, 4, 5 при $\alpha = 0,5$; $\beta = 1$; $\lambda \rightarrow \infty$; $\theta = \pi/2$; $\Gamma = 0,95$.

Из рис. 2 видно, что скорость фильтрации $\text{Re } u_{1\varphi}(r)$ сначала возрастает, а затем затухает по мере приближения к внешней границе пористой среды. С увеличением значений b/δ_2 (а значит, с увеличением частоты ω) скорости $\text{Re } u_{1\varphi}(r)$ и $\text{Re } u_{2\varphi}(r)$ уменьшаются при каждом заданном значении r . Вне пористой среды имеются слои жидкости с противоположными направлениями скоростей ($\text{Re } u_{2\varphi}(r) < 0$).

На рис. 3 графики зависимостей $\text{Re } u_{1\varphi}(r)$ и $\text{Re } u_{2\varphi}(r)$ построены при $\beta = 0$ и при тех же значениях остальных параметров, что и графики на рис. 2.

Из рис. 3 видно, что при $\beta = 0$ скорости фильтрации на поверхности непроницаемого твердого ядра принимают одинаковое значение, равное 0,475, при различных частотах ω .

Профили скоростей на рис. 4 построены при фиксированных значениях $b/\delta_2 = 0,5$; $\alpha = 0,5$; $\beta = 1$; $\lambda \rightarrow \infty$; $\theta = \pi/2$; $\Gamma = 0,95$ для разных значений $b/\delta_1 = 1, 2, 3, 4, 5$.

Из рис. 4 видно, что скорости жидкости внутри и вне пористой среды увеличиваются с возрастанием величины b/δ_1 при каждом значении r .

На рис. 5 приведены графики зависимостей $\text{Re } u_{1\varphi}(r)$ и $\text{Re } u_{2\varphi}(r)$ для разных значений λ ($\lambda = 0; 0,5; 1; \infty$) при фиксированных значениях других параметров $\alpha = 0,5$; $\beta = 1$; $\theta = \pi/2$; $\Gamma = 0,95$; $b/\delta_1 = 2$; $b/\delta_2 = 0,5$.

Из рис. 5 видно, что при $\lambda = 0,5$ в пористой среде имеются области со встречными направлениями скоростей движения жидкости. При $\lambda = 0$ в обла-

сти 1 скорость фильтрации линейно возрастает от значения 0,475 при $r = \alpha$ до значения $\Gamma = 0,95$ при $r = 1$. В области 2 (вне пористой среды) скорость монотонно убывает.

На рис. 6 графики профилей скоростей фильтрации в пористой среде и свободной жидкости вне пористой среды построены при $t = 0$; $\alpha = 0,5$; $\beta = 1$; $\lambda = 1$; $\theta = \pi/2$; $b/\delta_1 = 2$; $b/\delta_2 = 0,5$ для разных значений пористости $\Gamma = 0,6$; $0,8$; $0,9$.

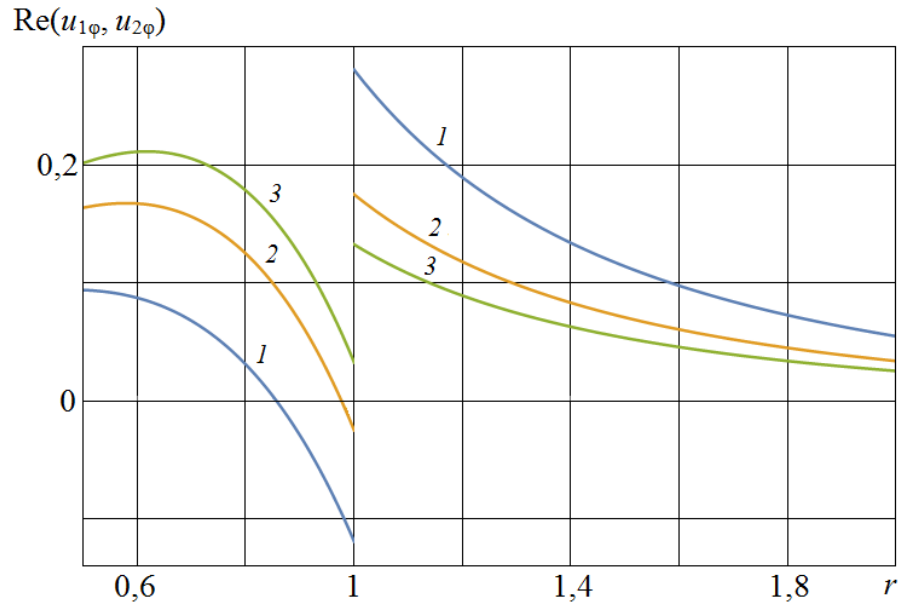


Рис. 6. Зависимость $\text{Re}(u_{1\phi}, u_{2\phi})$ от r : $t = 0$; $\alpha = 0,5$; $\beta = 1$; $\lambda = 1$; $\theta = \pi/2$; $b/\delta_1 = 2$; $b/\delta_2 = 0,5$; $\Gamma = 0,6$; $0,8$; $0,9$ (кривые 1–3)

Из рис. 6 видно, что при уменьшении пористости значения скоростей фильтрации в пористой среде уменьшаются при каждом фиксированном значении r , а в свободной жидкости скорости увеличиваются. Разрывы графиков профилей скоростей на границе пористой среды и свободной жидкости с увеличением пористости уменьшаются.

Заключение

Исследовано влияние вращательно-колебательного движения пористой сферической оболочки с непроницаемым твердым ядром, погруженной в вязкую жидкость, на движение этой жидкости внутри и вне пористого тела. В неподвижной сферической системе координат найдены аналитические решения уравнения Бринкмана, описывающего движение жидкости в пористой среде, и уравнения Навье – Стокса, описывающего движение жидкости вне пористой среды. Проведен анализ решений уравнений. Определены поля скоростей фильтрации и свободной жидкости внутри и вне пористого тела. Построены графики профилей скорости фильтрации и свободной жидкости при разных значениях параметров задачи.

Показано, что с увеличением частоты колебаний пористой сферической оболочки с непроницаемым ядром скорости фильтрации $\text{Re } u_{1\phi}(r)$ и свобод-

ной жидкости $Re\,u_{2\varphi}(r)$ при $t = 0$ уменьшаются при каждом заданном значении r , а при увеличении b/δ_1 скорости в обеих областях увеличиваются при каждом заданном значении r . При некоторых значениях параметров в областях внутри и вне пористой среды имеются слои жидкости с противоположными направлениями скоростей. При $\beta = 0$ и заданных значениях других параметров скорости фильтрации на поверхности непроницаемого твердого ядра принимают одинаковое значение. При $\lambda = 0$ в области 1 скорость фильтрации линейно возрастает, а в области 2 (вне пористой среды) скорость жидкости монотонно убывает. При уменьшении пористости значения скоростей фильтрации в пористой среде уменьшаются при каждом фиксированном значении r , а в свободной жидкости скорости увеличиваются.

Показано, что в частном случае из полученных результатов следуют известные ранее результаты для пористого шара, совершающего колебательные движения в вязкой жидкости.

Библиографический список

1. **Happel, J.** Low Reynolds number hydrodynamics / J. Happel, H. Brenner. – Englewood Cliffs, N. J. : Prentice-Hall, 1965.
2. **Collins, R. E.** Flow of fluids through porous materials / R. E. Collins. – New York : Reinhold Publishing Corporation, 1961.
3. **Scheidegger, A. E.** The physics of flow through porous media / A. E. Scheidegger. – Ottawa : University of Toronto Press, 1957.
4. **Landau, L. D.** Theoretical Physics. Vol. 6. Fluid Mechanics / L. D. Landau, E. M. Lifshitz. – New York : Pergamon Press, 2013.
5. **Batchelor, G. K.** An introduction to fluid dynamics / G. K. Batchelor. – Cambridge : Cambridge University Press, 2000.
6. **Brinkman, H. C.** A calculation of the viscous force exerted by a flowing fluid on a dense swarm of particles / H. C. Brinkman // Appl. Sci. Res. – 1947. – Vol. A1, № 1. – P. 27–34.
7. **Ochoa-Tapia, J. A.** Momentum transfer at the boundary between a porous medium and a homogeneous fluid. – I. Theoretical development / J. A. Ochoa-Tapia, S. Whitaker // Int. J. of Heat and Mass Transfer. – 1995. – Vol. 38, № 14. – P. 2635–2646.
8. **Whitaker, S.** The Forchheimer equation: a theoretical development / S. Whitaker // Transport in Porous Media. – 1996. – Vol. 25, № 1. – P. 27–61.
9. **Auriault, J.-L.** On the domain of validity of Brinkman's equation / J.-L. Auriault // Transp. Porous Med. – 2009. – Vol. 79, № 2. – P. 215–223.
10. **Durlofsky, L.** Analysis of the Brinkman equation as a model for flow in porous media / L. Durlofsky, J. F. Brady // Phys. Fluids. – 1987. – Vol. 30, № 11. – P. 3329–3341.
11. **Le Bars, M.** Interfacial conditions between a pure fluid and a porous medium: implications for binary alloy solidification / M. Le Bars, M. G. Worster // J. Fluid Mech. – 2006. – Vol. 550. – P. 149–173.
12. **Tilton, N.** Linear stability analysis of pressure-driven flows in channels with porous walls / N. Tilton, L. Cortezzi // J. Fluid Mech. – 2008. – Vol. 604. – P. 411–445.
13. **Grosan, T.** Brinkman flow of a viscous fluid through a spherical porous medium embedded in another porous medium / T. Grosan, A. Postelnicu, I. Pop // Transport in Porous Media. – 2010. – Vol. 81. – P. 89–103.
14. **Jones, I. P.** Low Reynolds number flow past a porous spherical shell / I. P. Jones // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. – 1973. – Vol. 73, № 1. – P. 231–238.
15. **Rajvanshi, S. C.** Slow extensional flow past a non-homogeneous porous spherical shell / S. C. Rajvanshi, S. Wasu // Int. J. of Applied Mechanics and Engineering. – 2013. – Vol. 18, № 2. – P. 491–502.

16. **Leont'ev, N. E.** Flow past a cylinder and a sphere in a porous medium within the framework of the Brinkman equation with the Navier boundary condition / N. E. Leont'ev // *Fluid Dynamics*. – 2014. – Vol. 49, № 2. – P. 232–237.
17. **Taktarov, N. G.** Viscous fluid flow induced by rotational-oscillatory motion of a porous sphere / N. G. Taktarov // *Fluid Dynamics*. – 2016. – Vol. 51, № 5. – P. 703–708.
18. **Taktarov, N. G.** Viscous fluid flow induced by translational-oscillatory motion of a submerged porous sphere / N. G. Taktarov, N. A. Khramova // *Fluid Dynamics*. – 2018. – Vol. 53, № 6. – P. 843–851.
19. **Abramowitz, M.** Handbook of mathematical functions / M. Abramowitz, I. A. Stegun. – Washington : U. S. Government Printing Office, 1964.

References

1. Happel J., Brenner H. *Low Reynolds number hydrodynamics*. Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall, 1965.
2. Collins R. E. *Flow of fluids through porous materials*. New York: Reinhold Publishing Corporation, 1961.
3. Scheidegger A. E. *The physics of flow through porous media*. Ottawa: University of Toronto Press, 1957.
4. Landau L. D., Lifshitz E. M. *Theoretical Physics. Vol. 6. Fluid Mechanics*. New York: Pergamon Press, 2013.
5. Batchelor G. K. *An introduction to fluid dynamics*. Cambridge: Cambridge University Press, 2000.
6. Brinkman H. C. *Appl. Sci. Res.* 1947, vol. A1, no. 1, pp. 27–34.
7. Ochoa-Tapia J. A., Whitaker S. *Int. J. of Heat and Mass Transfer*. 1995, vol. 38, no. 14, pp. 2635–2646.
8. Whitaker S. *Transport in Porous Media*. 1996, vol. 25, no. 1, pp. 27–61.
9. Auriault J.-L. *Transp. Porous Med.* 2009, vol. 79, no. 2, pp. 215–223.
10. Durlofsky L., Brady J. F. *Phys. Fluids*. 1987, vol. 30, no. 11, pp. 3329–3341.
11. Le Bars M., Worster M. G. *J. Fluid Mech.* 2006, vol. 550, pp. 149–173.
12. Tilton N., Cortelezzi L. *J. Fluid Mech.* 2008, vol. 604, pp. 411–445.
13. Grosan T., Postelnicu A., Pop I. *Transport in Porous Media*. 2010, vol. 81, pp. 89–103.
14. Jones I. P. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* 1973, vol. 73, no. 1, pp. 231–238.
15. Rajvanshi S. C., Wasu S. *Int. J. of Applied Mechanics and Engineering*. 2013, vol. 18, no. 2, pp. 491–502.
16. Leont'ev N. E. *Fluid Dynamics*. 2014, vol. 49, no. 2, pp. 232–237.
17. Taktarov N. G. *Fluid Dynamics*. 2016, vol. 51, no. 5, pp. 703–708.
18. Taktarov N. G., Khramova N. A. *Fluid Dynamics*. 2018, vol. 53, no. 6, pp. 843–851.
19. Abramowitz M., Stegun I. A. *Handbook of mathematical functions*. Washington: U. S. Government Printing Office, 1964.

Базаркина Ольга Александровна

кандидат физико-математических наук,
кафедра математики и методики
обучения математике, Мордовский
государственный педагогический
институт имени М. Е. Евсевьева (Россия,
г. Саранск, ул. Студенческая, 11а)

E-mail: o.a.bazarkina@mail.ru

Bazarkina Ol'ga Aleksandrovna

Candidate of physical and mathematical
sciences, sub-department of mathematics
and methods of mathematics teaching,
Mordovia State Pedagogical Institute
named after M. E. Evseyev (11a,
Studencheskaya street, Saransk, Russia)

Тактаров Николай Григорьевич

доктор физико-математических наук,
профессор, кафедра математики
и методики обучения математике,
Мордовский государственный
педагогический институт имени
М. Е. Евсевьева (Россия, г. Саранск,
ул. Студенческая, 11а)

E-mail: n.g.taktarov@mail.ru

Taktarov Nikolay Grigor'evich

Doctor of physical and mathematical
sciences, professor, sub-department
of mathematics and methods of mathematics
teaching, Mordovia State Pedagogical
Institute named after M. E. Evseyev
(11a, Studencheskaya street,
Saransk, Russia)

Образец цитирования:

Базаркина, О. А. Вращательные колебания пористой сферической оболочки с непроницаемым ядром в вязкой жидкости / О. А. Базаркина, Н. Г. Тактаров // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2020. – № 1 (53). – С. 73–87. – DOI 10.21685/2072-3040-2020-1-6.